XXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Информация о порядке участия в олимпиаде

В соответствии с Положением о Межрегиональной олимпиаде школьников по математике и криптографии олимпиада проводится в два тура – отборочный (дистанционный) и заключительный (очный).

В отборочном туре могут принимать участие все желающие школьники 8-11 классов, а в заключительном (очном) туре – победители и призеры отборочного тура. Без прохождения отборочного тура в очном туре олимпиады имеют право участвовать победители и призеры аналогичной олимпиады прошлого года.

С соответствии с регламентом проведения олимпиады в 2013/14 году, школьники, не вошедшие в число победителей и призеров отборочного тура или вообще не проходившие его, могут участвовать в очном туре в статусе гостей, т.е. без права войти в список победителей и призеров очного тура для получения льгот при поступлении в вузы в 2014 году.

Отборочный тур проводится в дистанционной форме. Для участия в нем необходимо пройти регистрацию по адресу http://register.cryptolymp.ru и получить в период с 5 по 22 ноября условия задач.

Задание отборочного тура состоит из шести задач. Первые четыре из них составлены на основе задач олимпиады прошлых лет, к которым в приложении приводятся указания и ответы. После того, как Вы решите задачи отборочного тура, необходимо в срок с 17 до 22 ноября заполнить на сайте регистрации форму с ответами. Обращаем внимание, что сдача ответов происходит только один раз, сразу по всем задачам, которые Вы смогли решить. Поэтому советуем не торопиться, но и не откладывать сдачу заданий на последний день. На решение заданий, с учетом загруженности в школе, рекомендуется отвести 4-5 дней.

Итоги отборочного тура будут подведены 24 ноября. В случае успешного прохождения Вами этого тура появится возможность выбрать место участия в очном туре и распечатать анкету участника с уникальным номером (ее будет необходимо взять с собой на очный тур олимпиады).

XXIII Межрегиональная олимпиада школьников
по математике и криптографии

<u>Задачи отборочного тура для участников из 10 классов</u>

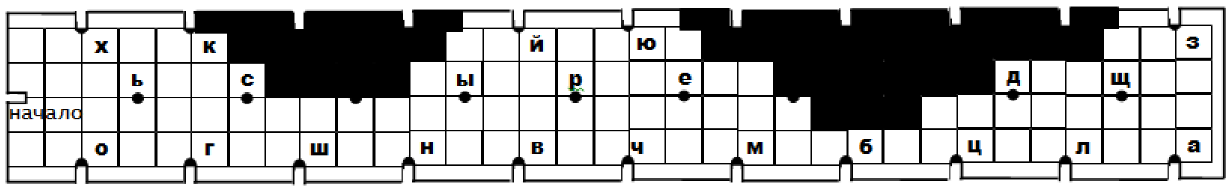
Задача № 1

Известно, что двадцатизначное число $A = 2013x2013x2013x2013x$ делится нацело на 121. Найдите сумму всех возможных значений цифры x.

Ответ: 0.

Задача № 2

При раскопках стоянки первобытных хакеров были обнаружены приспособления, предположительно использовавшиеся для шифрования паролей: частично поврежденная фигурная линейка (см. рис. 1) и катушка с белой нитью, на которую нанесены одинаковые черные метки. Расстояния между последовательно идущими метками измерены в единицах деления найденной линейки и равны: 81; 11.5; 36; 144; 78.5; 6.5. Прочитайте пароль, зашифрованный хакерам



Ответ: Дамаск.

Задача № 3

Пусть $a_{i,j}$ – число, стоящее в строке с номером i и столбце с номером j квадратной таблице A (см. рис. 1). По таблице A построена таблица B, в строке с номером i и столбце с номером j которой стоит выражение $x^{(2^{a_{ij}})}$. Набор из десяти клеток таблицы будем называть «правильным», если в нем присутствуют ровно по одной клетке из каждого столбца и каждой строки. Вычисляются произведения элементов, входящих в правильные наборы. Результатом являются выражения вида x^n. Такое n будем называть степенью правильного набора. Найдите число правильных наборов степени 1023.

0	1	2	3	0	0	0	0	0	0
1	0	3	2	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	4	5	6	0	0	0
0	0	0	0	5	6	4	0	0	0
0	0	0	0	6	4	5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	8	9	7
0	0	0	0	0	0	0	9	7	8

Рис. 1

Ответ: 72.

Задача № 4

При установке соединения между компьютерами **A** и **B** используется следующий вариант т.н. «процедуры рукопожатия»: 1) **A** выбирает натуральное число x, не большее 5250, и пересылает **B** значение функции $F(x)$, а затем **B** пересылает **A** число $F(x+1)$; 2) теперь **B** выбирает натуральное число y, не большее 5250, и пересылает **A** число $F(y)$, а **A** пересылает в ответ $F(y+1)$. При этом, $F(x) = r_{5251}(x^3)$, где $r_{5251}(t)$ - остаток от деления целого числа t на число 5251. Найдите сумму чисел x и y, если в сети последовательно наблюдались числа: 427, 443, 1841 и 1854. Замечание: известно, что в компьютерах **A** и **B** реализована процедура, решающая уравнение $r_{5251}(x^3)=a$, где x– неизвестное целое число, $0 \le x \le 5250$, и число 5251 выбрано так, что это уравнение имеет единственное решение.

Ответ: 441.

Задача № 5

Подписью числа $x \in \mathbb{N}$ назовем число, равное остатку от деления x^d на 5177, где $d \in \mathbb{N}$ - некоторое фиксированное число. Известно, что подписью числа 12 является число 3582 и подписью числа 16 – число 2174. Найдите подпись числа 2304.

Ответ: 2179.

Задача № 6

Для связи абонентов A и B каналу связи передаются последовательности, состоящие из нулей и единиц. Для каждых четырех символов $a_1a_2a_3a_4$ последовательности, вычисляют *проверочную* последовательность $b_1b_2b_3$ по формулам:

$$b_1 = r_2(a_1 + a_2 + a_4), \qquad b_2 = r_2(a_2 + a_3 + a_4), \qquad b_3 = r_2(a_1 + a_3 + a_4),$$

где $r_2(x)$ – остаток от деления числа x на 2. В канале связи могут возникать помехи, приводящие к ошибкам при передаче: “0” может быть принят как “1”, а “1” как “0”. Абонент A по каналу передает набор $(b_1b_2b_3a_1a_2a_3a_4)$. Абонент B по полученному набору определяет, возникли ли ошибки, и если так, то их исправляет, и затем находят искомую последовательность. Известно, что абонент B получил набор (0110100). Считая, что в нем произошло не более одной ошибки, найдите $a_1a_2a_3a_4$.

Ответ: 1100.

Приложение. Примеры решения задач

Задача № 1

Известно, что десятизначное число $A = 2013x2013y$ делится нацело на 121. Найдите все возможные пары цифр (x, y). Решение обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $121 = 11 \cdot 11$. Используя признак делимости на 11 (знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11) получаем, что число A делится на 11 только при условии $x = y$. Действительно, знакопеременная сумма цифр числа A равна:

$$y + 1 + 2 + 3 + 0 - (3 + 0 + x + 1 + 2) = y - x.$$

Но y и x являются цифрами, следовательно $|y - x| < 11$, поэтому делимость возможна тогда и только тогда, когда $x = y$. Отсюда, число A имеет вид $2013x(10^5 + 1)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $10^5 + 1$ делится на 11, но не делится на 121. Следовательно, на 11 должно делиться число $2013x$. Используя признак делимости на 11, находим, что $x = 0$, а значит и $y = 0$.

Ответ: (0,0).

Задача № 2

При раскопках стоянки первобытных хакеров были обнаружены приспособления, предположительно использовавшиеся для шифрования паролей: частично поврежденная фигурная линейка (см. рис. 1) и катушка с белой нитью, на которую нанесены одинаковые черные метки. Расстояния между последовательно идущими метками измерены в единицах деления найденной линейки и равны: 29.5; 24.5; 90; 29.5; 40; 32. Прочитайте пароль, зашифрованный хакерами

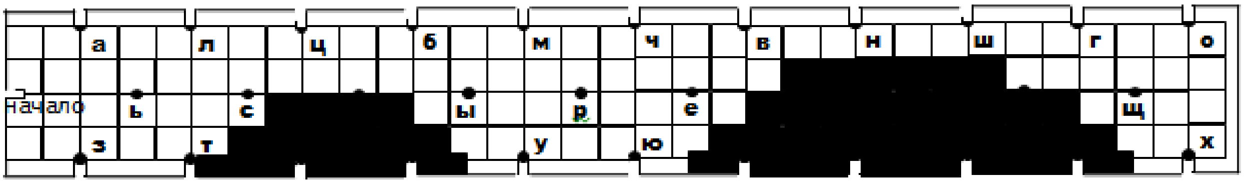


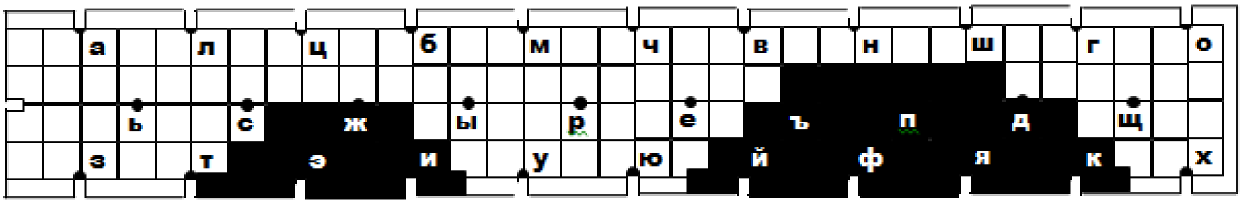
Рис. 1

Решение:

Рассмотрение оставшихся неповрежденными букв позволяет сделать предположение, что до порчи линейки на ней был изображен 32-буквенный русский алфавит (буква «ё» отсутствует). Анализ порядка следования букв в первой строке и букв, оставшихся во второй и третьей строках, позволяют восстановить утраченные символы (см. рис. 2).

Рассмотрение размеров и формы линейки позволяет сделать предположение о том, что шифрование осуществлялось по принципу «полоски Энея». Анализ величин расстояний между окрашенными точками на нити и на линейке позволяет предположить, что наматывание нити производилось так, что с оборотной стороны линейки нить ложилась вертикально, а с лицевой – диагонально. Возможны два варианта начала наматывания нити: от «а» к «з» или наоборот. Перебирая два варианта расшифрования, получаем ответ: БЕРЛИН.

Рис. 2



Ответ: Берлин.

Задача № 3

Пусть $\boldsymbol{a_{ij}}$ – число, стоящее в строке с номером $\boldsymbol{i}$ и столбце с номером $\boldsymbol{j}$ квадратной таблицы $\boldsymbol{A}$ (табл. 1). По таблице $\boldsymbol{A}$ построена таблица $\boldsymbol{B}$, в строке с номером $\boldsymbol{i}$ и столбце с номером $\boldsymbol{j}$ которой стоит выражение $x^{2^{a_{ij}}}$. Набор из десяти клеток таблицы будем называть «правильным», если в нем присутствуют ровно по одной клетке из каждого столбца и каждой строки. Вычисляются произведения элементов, входящих в правильные наборы. Результатом являются выражения вида x^n. Найдите наибольшую возможную степень правильного набора (число n) и число правильных наборов степени 1023.

Табл. 1

5	6	7	8	0	0	0	0	0	0
6	5	8	7	0	0	0	0	0	0
7	8	5	6	0	0	0	0	0	0
8	7	6	5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	9	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	9	0	0	0
0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	3	4	2
0	0	0	0	0	0	0	4	2	3

Решение:

Табл. 2

5	6	7	**8**	0	0	0	0	0	0

6	5	**8**	7	0	0	0	0	0	0
7	**8**	5	6	0	0	0	0	0	0
8	7	6	5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	**9**	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	**9**	0	0	0
0	0	0	0	1	**9**	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	2	3	**4**
0	0	0	0	0	0	0	3	**4**	2
0	0	0	0	0	0	0	**4**	2	3

Наибольшая возможная степень правильного набора получается при перемножении элементов, стоящих в таблице $\boldsymbol{B}$ на местах, соответствующих местам в таблице $\boldsymbol{A}$, которые в табл. 3 выделены жирным шрифтом. Поэтому наибольшая степень равна $4 \cdot 2^8 + 3 \cdot 2^9 + 3 \cdot 2^4 = 2608$.

Чтобы решить вторую часть задачи, заметим, что верно следующее:

$$1023 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^9.$$

Отсюда следует, что искомый коэффициент равен числу таких наборов по 10 элементов, стоящих в различных строках и столбцах в табл. 2, в которых каждое число от 0 до 9 встречается по одному разу. Любой такой набор распадается на 3 набора: набор с числами 2, 3, 4 в нижнем правом квадрате, набор с числами 0, 1, 9 в центральном квадрате и набор с числами 5, 6, 7, 8 в верхнем левом квадрате. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что в каждом из указанных квадратов соответственно имеется 3, 3 и 8 таких наборов, следовательно, общее число наборов равно $3 \cdot 3 \cdot 8 = 72$.

Ответ: 2608; 72.

Задача № 4

При установке соединения между компьютерами **А** и **В** используется следующий вариант т.н. «процедуры рукопожатия»: 1) **А** выбирает натуральное число *x*, не большее 5250, и пересылает **В** значение функции $F(x)$, а затем **В** пересылает **А** число $F(x+1)$; 2) теперь **В** выбирает натуральное число *y*, не большее 5250, и пересылает **А** число $F(y)$, а **А** пересылает в ответ $F(y+1)$. При этом, $F(t) = r_{5251}(t^3)$, где $r_{5251}(t)$ - остаток от деления целого числа *t* на число 5251. Найдите числа *x* и *y*, если в сети последовательно наблюдались числа: 506, 519, 229 и 231. *Замечание*: известно, что в компьютерах **А** и **В** реализована процедура, решающая уравнение $r_{5251}(x^3) = a$, где x – неизвестное целое число, $0 \le x \le 5250$, и число 5251 выбрано так, что это уравнение имеет единственное решение.

Решение:

Исходя из условия задачи, составим систему уравнений в общем виде для z, где z - это либо x, либо y:

$$\begin{cases} r_N(z^3) = c_1, \\ r_N((z+1)^3) = c_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} r_N(z^3) = c_1, \\ r_N(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = c_2, \end{cases}$$

c_1, c_2, N - известны. Заметим, что

$$r_N(c_2 - c_1 + 2) = r_N(z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - z^3 + 2) = r_N(3z^2 + 3z + 3),$$

$$r_N(c_2 + 2c_1 - 1) = r_N(z^3 + 3z^2 + 3z + 1 + 2z^3 - 1) = r_N(3z^3 + 3z^2 + 3z),$$

тогда получаем

$$r_N(z \cdot (c_2 - c_1 + 2)) = r_N(c_2 + 2c_1 - 1).$$

Для первой пары чисел 506, 519 получаем, что:

$$c_2 + 2c_1 - 1 = 1530;$$

$$c_2 - c_1 + 2 = 15;$$

тогда, исходя из этого, имеем: $x = \frac{1530}{15} = 102$. Для второй пары чисел 229, 231 получаем $y = 72$.

Ответ: $(x, y) = (102, 72)$.